第1讲 因式分解

**知识梳理**

**1.因式分解**

把一个多项式化为几个整式的积的形式，叫做把这个多项式**因式分解**，也叫做把这个多项式**分解因式**.

**2.因式分解的基本方法**

**(1)提取公因式法：**如果一个多项式的各项含有公因式，那么可以把该公因式提取出来作为多项式的一个因式，提出公因式后的式子放在括号里，作为另一个因式.这种分解因式的方法叫做提取公因式法.即：

**(2)公式法：**逆用乘法公式将一个多项式分解因式的方法叫做公式法.

即：

**(3)十字相乘法：**利用十字交叉线来分解系数，把二次三项式分解因式的方法叫做十字相乘法.型式子的因式分解，

即：

**(4)分组分解法：**利用分组来分解因式的方法叫做分组分解法.

①分组后能直接提公因式；②分组后能直接运用公式.

**3.因式分解的一般步骤**

(1)多项式的各项有公因式时，先提公因式.

(2)各项没有公因式时，要看看能不能用公式法来分解.

(3)如果用上述方法不能分解因式，再看能不能运用分组分解法.

(4)分解因式，必须进行到每一个多项式都不能再分解为止.

**4.因式分解的应用**

因式分解在解决数学问题时应用得非常广泛，例如在多项式恒等变形中、在代数证明题中、在方程求解中、在不等式求解中以及很多几何学中的应用都非常广泛，它能把高次转化为低次，起到化难为易的效果.

**典型解析**

**例1：因式分解的识别**

下列由左边到右边的变形中，哪些是因式分解？哪些不是？

(1)12*x*2*y*=4*x*·3*xy*； (2)(*x*+2)(*x*-2)=*x*2-4；

(3)*x*2+2*x*-3=(*x*+3)(*x*-1)； (4)2*x*2-3*x*+1=*x*(2*x*-3)+1；

(5) (6)

[解析](3)(6)符合因式分解的定义，是因式分解；(2)(4)等号的右边不是积的形式，所以不是因式分解；(1)等号的左边不是多项式，故不是因式分解；(5)等号的右边不全是整式形式，不符合因式分解的定义.

[答案](3)(6)是因式分解，(1)(2)(4)(5)不是因式分解.

[点评]判断一个由左边到右边的变形是否为因式分解的关键是看这个变形是不是把一个多项式化成几个整式积的形式，且要注意将单项式拆成几个单项式乘积的形式不能称为因式分解.

**【变式训练】**

下列变形是不是因式分解？为什么？

(1)3*x*2*y*-*xy*+*y*=*y*(3*x*2-*x*)； (2)*x*2-2*x*+3=(*x*-1)2+2；

(3)*x*2*y*2+2*xy*-1=(*xy*+1)(*xy*-1)； (4)*xn*(*x*2-*x*+1)=*xn*+2-*xn*+1+*xn*.

[答案](1)不是因式分解，可以用整式乘法检验其等号左右两边不相等.

(2)不是因式分解，不满足因式分解的定义.

(3)不是因式分解，因为因式分解是恒等变形，而本题不恒等.

(4)不是因式分解，是整式乘法运算.

**例2：灵活进行因式分解**

题型一：直接提公因式

(1) -12*x*3*z*+18*x*4*y* (2) 3*x*(*a*-*b*)+2*y*(*b*-*a*)

题型二：直接用公式

(3)*x*2-9*y*2 (4)4*x*2+2*x*+

题型三：先提公因式再套公式

(5)2*x*2-8 (6)-*a*3+*a*2*b*-*ab*2

(7)*a*2*b*+2*ab*+*b* (8)*x*4*y*2-6*x*2*y*2-27*y*2

题型四：先分组再套公式

(9)*x*2-*y*2-3*x*-3*y* (10)16+8*xy*-16*x*2-*y*2

题型五：把代数式作为一个整体

(11)(*a*+*b*)3-4(*a*+*b*) (12) (*x*+*y*)2-4(*x*+*y*-1)

**例3：十字相乘法**

(1) (2)8*x*2+6*x*－35； (3)18*x*2－21*x*+5；

(4) 20－9*y*－20*y*2； (5)； (6)** =.**

**例4：较复杂的因式分解，可能会两次进行十字相乘，一定要分解彻底.**

(1)； (2)；

(3)； (4).

=

**例5：因式分解的应用**

(1)用提公因式法先化简再求值

当已知条件不容易解出每个字母的取值时，可通过提公因式构造已知条件中式子的值，然后运用整体代入求出代数式的值.

已知*ab*=2，求代数式*a*2*b*+2*a*2*b*2+*ab*2的值.

[解析]先提取公因式*ab*，再将*a*+*b*，*ab*的值整体代入即可.

[答案]*a*2*b*+2*a*2*b*2+*ab*2=*ab*(*a*+2*ab*+*b*)=*ab*[(*a*+*b*)+2*ab*].

把*ab*=2代入，得原式=2×

(2)依据完全平方公式的定义求值

若是完全平方式，求*k*的值.

[答案]∵=

[易错警示]完全平方公式有两个，故*k*的值也有两个，且互为相反数.

(3)因式分解在几何问题中的应用

已知*a*，*b*，*c*是△*ABC*的三边长，且满足*a*2-*b*2+*ac*-*bc*=0，试判断△*ABC*的形状.

[解析]由*a*，*b*，*c*是△*ABC*的三条边长知，*a*>0，*b*>0，*c*>0.通过分解因式将等式左边变形，可知三角形的形状.

[答案]*a*2-*b*2+*ac*-*bc*=0，

(*a*+*b*)(*a*-*b*)+(*a*-*b*)*c*=0，

(*a*-*b*)(*a*+*b*+*c*)=0.

因为*a*，*b*，*c*是△*ABC*的三条边长，

所以*a*+*b*+*c*≠0，

所以*a*-*b*=0，即*a*=*b*.

所以△*ABC*是等腰三角形.

[规律总结]解决此类问题的关键是利用乘法公式进行分解因式，确定*a*，*b*，*c*之间的关系，从而判断三角形的形状.

**例6：**解方程：(5*x*-12)(9*x*+5)-(9*x*-7)(5*x*-12)=0.

[解析]因为等式左边两个乘积式中含有公因式(5*x*-12)，所以可先将等式左边提取公因式后进行因式分解，这样可以简化方程.

[答案](5*x*-12)[(9*x*+5)-(9*x*-7)]=0，即12(5*x*-12)=0.∴5*x*-12=0.∴

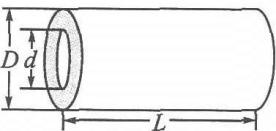
**例7：**已知求*a*，*b*的值.

[解析]等式的左边含有字母*a*，*b*的平方及一次项还有常数项，而等式的右边是0，所以考虑将等式左边通过因式分解进行变形，使之变成几个非负数和的形式，从而列出关于*a*，*b*的方程组，求出*a*，*b*的值.

[答案]∵

∴

[点评]本题在等式左边进行因式分解变形的过程中，将“”进行了拆分，这种方法叫拆项法.同学们要认真体会这种方法.在对含有字母*a*，*b*的平方及一次项、常数项的多项式进行因式分解时，拆项法是行之有效的一种方法.

**例8：**某农场修建一座小型水库，需要一种空心混凝土管道，它的规格是：内径*d*=45cm，外径*D*=75cm，长*L*=300cm，如图.利用因式分解计算烧制一节这样的管道需要多少立方米的混凝土？(*π*取3.14，结果保留两个有效数字)

[解析]本题求解的关键是确定图中圆环的面积，再将其乘管道的长度即得所求的结果.

[答案]混凝土的体积为8.5×105(cm3)=0.85(m3).

答：烧制一节这样的管道需要混凝土约0.85m3.

**同步训练**

**一、填空题**

1.分解因式： ．

2.分解因式：*x*2-16= .

3.分解因式：

4.如果*x*2-*xy*-*y*2=(*x*+*a*)(*x*-*b*)，那么*a*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，*b*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：

5.若是一个完全平方式，则*m*的值是

6.若25*x*2+*kxy*+4*y*2是一个完全平方式，则*k*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：±20 [解析]25*x*2+*kxy*+4*y*2=(5*x*)2±2×5*x*×2*y*+(2*y*)2，所以*k*=±2×5×2=±20.

7.把分解因式的结果是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：

8.因式分解(*x*2+3*x*)2+(*x*2+3*x*)-*m*=(*x*+4)(*x*-1)(*x*2+3*x*+5)，则*m*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：20

**二、选择题**

9.分解因式：*x*2-2*xy*+*y*2+*x*-*y*，其结果是( ).

A.(*x*-*y*)(*x*-*y*+1) B.(*x*-*y*)(*x*-*y*-1) C.(*x*+*y*)(*x*-*y*+1) D.(*x*+*y*)(*x*-*y*-1)

答案：A [解析]*x*2-2*xy*+*y*2+*x*-*y*=(*x*2-2*xy*+*y*2)+(*x*-*y*)=(*x*-*y*)2+(*x*-*y*)=(*x*-*y*)·(*x*-*y*+1).

10.因式分解(*x*2-2*x*)2-11(*x*2-2*x*)+24正确的是( ).

(A)(*x*2-2*x*-8)(*x*2-2*x*-3) (B)(*x*2-2*x*+8)(*x*2-2*x*+3)

(C)(*x*-4)(*x*+2)(*x*-3)(*x*+1) (D)(*x*+4)(*x*-2)(*x*+3)(*x*-1)

答案：C

**三、解答题**

11.分解因式：

(1)-*a*--*a*2； (2)*a*4-*b*4；

(3)*x*2+16*x*+63； (4)*a*3+*a*2*b*-*a*2*c*-*abc*；

(5)3*x*(4*x*-*y*)-(4*y*+*x*)(-4*x*+*y*)； (6)*c*(4-*a*)+(*a*-4)(1-*c*)；

(7)9*x*2-(*x*-*y*)2； (8)*x*4-2

(9)*x*4-*x*2+4*x*-4； (10)2(*a*-*b*)2-4(*a*-*b*)-48.

答案：(1)；(2)(*a*2+*b*2)(*a*+*b*)(*a*-*b*)；(3)(*x*+7)(*x*+9)；(4)*a*(*a*-*c*)(*a*+*b*)；(5)4(*x*+*y*)(4*x*-*y*)；(6)(4-*a*)(2*c*-1)；(7)(4*x*-*y*)(2*x*+*y*)；(8)(*x*+1)2(*x*-1)2；(9)(*x*+2)(*x*-1)(*x*2-*x*+2)；(10)2(*a*-*b*-6)(*a*-*b*+4)

12.不解方程组，求代数式(2*x*+*y*)(2*x*-3*y*)+3*x*(2*x*+*y*)的值.

分析：不要求解方程组，我们可以把2*x*+*y*和5*x*-3*y*看成整体，它们的值分别是3和-2，观察代数式，发现每一项都含有2*x*+*y*，利用提公因式法把代数式恒等变形，化为含有2*x*+*y*和5*x*-3*y*的式子，即可求出结果.

解：(2*x*+*y*)(2*x*-3*y*)+3*x*(2*x*+*y*)=(2*x*+*y*)(2*x*-3*y*+3*x*)=(2*x*+*y*)(5*x*-3*y*)

把2*x*+*y*和5*x*-3*y*分别为3和-2代入上式，求得代数式的值是-6.

13.已知*m*+*n*=-*mn*=求关于*x*的二次三项式*x*2+*mn*-*mx*-*nx*因式分解的结果.

答案：

**【探索创新】**

(1)能被198整除吗？能被200整除吗？说明你的理由.

(2)说明：当*n*为正整数时，的值必为6的倍数.

**走进中考**

(2013·上海中考)因式分解： = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：*a*2-1=(*a*+1)(*a*-1)